ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

———————o0o———————

HOÀNG THỊ THU HIỀN

LIÊN PHÂN SỐ VỚI TỬ SỐ BẤT KỲ

THÁI NGUYÊN - 2018

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

o0o

HOÀNG THỊ THU HIỀN

LIÊN PHÂN SỐ VỚI TỬ SỐ BẤT KỲ

CHUYÊN NGÀNH: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
MÃ SỐ: 8 46 01 13

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

TS. NGÔ VĂN ĐỊNH

THÁI NGUYÊN - 2018

Mục lục

Mở đầu **1**

Chương 1. Liên phân số chính tắc **3**

1.1 Định nghĩa 3

1.2 Thuật toán biểu diễn số thực bằng liên phân số chính tắc 4

1.3 Liên phân số hữu hạn, liên phân số vô hạn 4

1.4 Dãy giản phân của số thực 5

1.5 Liên phân số của nghịch đảo 6

Chương 2. Liên phân số với tử số nguyên dương **7**

2.1 Một số kết quả 7

2.2 Khai triển số vô tỷ bậc hai 14

2.3 Phương trình Pell 21

Chương 3. Liên phân số với tử số bất kỳ **28**

3.1 Các liên phân số có dạng các hàm hữu tỷ 28

3.2 Biểu diễn, tính hội tụ và tính duy nhất 30

3.3 Khai triển với số hữu tỷ z 38

3.4 Khai triển tuần hoàn và số vô tỉ bậc hai giảm 40

3.5 Các khai triển tuần hoàn cho $\sqrt{n}$ 43

Kết luận **50**

Tài liệu tham khảo **51**

Mở đầu

Liên phân số là một cách viết rõ ràng cho một số thập phân bất kỳ. Một liên phân số chính tắc có dạng

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots}}}.$$

Mỗi số thực đều có thể được viết dưới dạng liên phân số chính tắc. Liên phân số có nhiều ứng dụng thực tế (xem [1]). Năm 2011, Anselm và Weintraub [2] đã nghiên cứu và công bố một số kết quả về liên phân số tổng quát có dạng

$$a_0 + \cfrac{z}{a_1 + \cfrac{z}{a_2 + \cfrac{z}{a_3 + \cdots}}},$$

trong đó z là một số nguyên dương tùy ý. Năm 2017, Greene và Schmieg [3] đã mở rộng kết quả của Anselm và Weintraub cho trường hợp z là một số thực bất kỳ lớn hơn hay bằng 1.

Mục đích của đề tài là nghiên cứu và trình bày lại các kết quả nêu trên. Ngoài phần mở đầu và kết luận, luận văn gồm 3 chương:

Chương 1. Liên phân số chính tắc. Mục đích của chương này là giới thiệu sơ lược về liên phân số chính tắc.

Chương 2. Liên phân số với tử số nguyên dương. Chương 2 trình bày lại các kết quả của Anselm và Weintraub về liên phân số với tử số nguyên dương.

Chương 3. Liên phân số với tử số không nguyên. Chương 3 trình bày lại các kết quả của Greene và Schmieg về liên phân số với tử số là số thực bất kỳ.

Luận văn được hoàn thành tại trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên. Lời đầu tiên tác giả xin được bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới thầy giáo

TS. Ngô Văn Định. Thầy đã dành nhiều thời gian hướng dẫn cũng như giải đáp các thắc mắc của tôi trong suốt quá trình làm luận văn. Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới thầy.

Tác giả xin chân thành cảm ơn toàn thể các thầy cô trong Khoa Toán - Tin, trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên đã tận tình hướng dẫn, truyền đạt kiến thức trong suốt thời gian theo học, thực hiện và hoàn thành luận văn.

Cảm ơn sự giúp đỡ của bạn bè, người thân và các đồng nghiệp trong thời gian làm luận văn.

Thái Nguyên, tháng 05 năm 2018

Người viết luận văn

Hoàng Thị Thu Hiền

Chương 1

Liên phân số chính tắc

Trong chương này, chúng tôi nhắc lại sơ lược về khái niệm liên phân số chính tắc và một số tính chất của liên phân số.

1.1 Định nghĩa

Định nghĩa 1.1. *Liên phân số chính tắc* (hay còn gọi là *phân số liên tục chính tắc*) là biểu thức có dạng

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots}}} \tag{1.1}$$

trong đó a_0 là một số nguyên không âm và tất cả các số a_n là số nguyên dương.

Liên phân số có thể biểu diễn chính xác các số thực. Dạng tổng quát hơn của liên phân số là

$$x = a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \ddots}}}$$

trong đó b_n là số nguyên dương.

Mọi số thực đều có thể biểu diễn dưới dạng liên phân số chính tắc. Cách biểu diễn số thực dưới dạng liên phân số cho ta khá nhiều đặc trưng thú vị. Chẳng hạn, với liên phân số dạng chính tắc như đã nêu trong định nghĩa trên, ta có x là số hữu tỷ khi và chỉ khi dãy $\{a_n\}_{n\geq 1}$ là dãy hữu hạn; nếu dãy $\{a_n\}_{n\geq 1}$ là một dãy vô hạn tuần hoàn thì x là nghiệm của một đa thức bậc hai với hệ số nguyên.

Để tránh phải viết công thức cồng kềnh, chúng ta thường viết liên phân số (1.1) dưới dạng:

$$x = a_0 + \frac{1}{a_1+} + \frac{1}{a_2+} + \frac{1}{a_3+} + \cdots$$

hoặc ta còn viết $x = [a_0; a_1, a_2, a_3, ...]$.

1.2 Thuật toán biểu diễn số thực bằng liên phân số chính tắc

Cho số thực r, ký hiệu i là phần nguyên của r, f là phần thập phân của r. Biểu diễn liên phân số của r là $[i; a_1, a_2, ...]$, trong đó $[a_1; a_2, ...]$ là dạng biểu diễn liên phân số của $1/f$. Nếu như $f = 0$ thì thuật toán dừng lại, trong trường hợp f khác 0, ta lặp lại các bước trên với r thay bằng $1/f$.

Ví dụ 1.2. Xét số $\frac{415}{93}$, phần nguyên của phân số này là 4, phần lẻ của nó là số $\frac{43}{93}$ xấp xỉ bằng $\frac{1}{2}$, ta muốn giữ nguyên tử số 1 và thay mẫu số 2 bằng một số khác, chính xác hơn là $2 + \frac{7}{43}$, khi đó có thể viết

$$\frac{415}{93} = 4 + \frac{43}{93} = 4 + \frac{1}{\frac{93}{43}} = 4 + \frac{1}{2 + \frac{7}{43}} = 4 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{43}{7}}} = 4 + \frac{1}{2 + \frac{1}{6 + \frac{1}{7}}}.$$

Như vậy, ta có

$$\frac{415}{93} = [4; 2, 6, 7].$$

1.3 Liên phân số hữu hạn, liên phân số vô hạn

Liên phân số hữu hạn biểu diễn số hữu tỉ. Ngược lại, một số hữu tỉ bất kì có thể biểu diễn bằng liên phân số hữu hạn theo 2 cách: cách thứ nhất, bằng thuật toán nêu ở phần thuật toán biểu diễn số thực bằng liên phân số, ta được liên phân số

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n];$$

cách thứ hai, từ biểu diễn ở cách thứ nhất, ta bớt đi 1 đơn vị ở thành phần cuối, và thêm vào sau nó một thành phần đúng bằng 1:

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n - 1, 1].$$

Ví dụ 1.3. *Thực hiện thuật toán nêu trong Mục 1.2, ta có:*

$$2.25 = 2 + 1/4 = [2; 4] = [2; 3, 1],$$
$$-4.2 = -5 + 4/5 = [-5; 1, 4] = [-5; 1, 3, 1].$$

Như vậy, liên phân số vô hạn là số vô tỉ và hiển nhiên mọi số vô tỉ đều được biểu diễn dưới dạng liên phân số vô hạn. Trong đó, đáng chú ý là các liên phân số vô hạn tuần hoàn luôn là nghiệm của một đa thức bậc hai với hệ số nguyên và ngược lại.

Ví dụ 1.4. $[1; 2, 2, 2, 2, 2, 2, \ldots] = \sqrt{2}$ là nghiệm của đa thức bậc hai $x^2 - 2$.

$[0; 2, 3, 4, 2, 3, 4, 2, 3, 4, \ldots] = \dfrac{-27}{14} + \dfrac{1}{14}\sqrt{1093}$ là nghiệm của đa thức bậc hai $7x^2 + 27x - 13$.

1.4 Dãy giản phân của số thực

Cho số thực r có dạng liên phân số là $[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n, \ldots]$ (có thể hữu hạn hoặc vô hạn). Từ công thức biểu diễn trên, có thể xây dựng một dãy số hữu tỉ (hữu hạn hoặc vô hạn) hội tụ đến r, dãy này gọi là dãy giản phân:

$$\begin{aligned}
&\frac{h_0}{k_0} = \frac{a_0}{1}\\
&\frac{h_1}{k_1} = [a_0; a_1] = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1}\\
&\frac{h_2}{k_2} = \frac{a_2(a_1 a_0 + 1) + a_0}{a_2 a_1 + 1}\\
&\frac{h_3}{k_3} = \frac{a_3(a_2(a_1 a_0 + 1) + a_0) + (a_1 a_0 + 1)}{a_3(a_2 a_1 + 1) + a_1}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{h_n}{k_n} = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n]\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Đặt $r_n = \dfrac{h_n}{k_n}$.

Ví dụ 1.5. Dãy giản phân của 0.84375 (dạng liên phân số là $[0; 1, 5, 2, 2]$):

$[0; 1]$	$[0; 1, 3]$	$[0; 1, 4]$	$[0; 1, 5]$	$[0; 1, 5, 2, 1]$	$[0; 1, 5, 2, 1]$	$[0; 1, 5, 2, 2]$
1	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{11}{13}$	$\frac{16}{19}$	$\frac{27}{32}$

1.5 Liên phân số của nghịch đảo

Cho số hữu tỷ dương r, nếu biết dạng liên phân số của nó là

$$[a_0; a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n]$$

yêu cầu đặt ra là tìm dạng liên phân số của nghịch đảo $1/r$.

Xét 2 trường hợp:

- nếu $r > 1$, tức là $a_0 \geq 1$ thì liên phân số của $1/r$ là:

$$[0; a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n]$$

- nếu $0 < r < 1$, tức là $a_0 = 0$ thì liên phân số của $1/r$ là:

$$[a_1; a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n].$$

Ví dụ 1.6.

$$2.25 = \frac{9}{4} = [2; 4], \quad \frac{1}{2.25} = \frac{4}{9} = [0; 2, 4]$$
$$\frac{15}{17} = [0; 1, 7, 2] \quad \frac{17}{15} = [1; 7, 2].$$

Chương 2

Liên phân số với tử số nguyên dương

Trong Mục 2.1 của chương này, chúng tôi trình bày lại kết quả cơ bản về khai triển cf_N. Ta sẽ thấy rằng mọi số thực dương x_0 đều có một khai triển cf_N. Hơn nữa, nếu $N > 1$ thì mỗi số hữu tỷ có cả khai triển cf_N hữu hạn và vô hạn; nếu $N > 2$ nó có khai triển không tuần hoàn. Nếu $N > 1$, mọi số vô tỷ bậc hai có cả khai triển tuần hoàn và không tuần hoàn. Ở đây chúng ta sử dụng ngôn ngữ và ký hiệu chuẩn: $x_0 = [a_0, a_1, a_2, \ldots]_N$ là tuần hoàn theo chu kỳ k từ $i = m$ nếu $a_{i+k} = a_i$ với mọi $i \geq m$, và trong trường hợp này chúng ta viết $x_0 = [a_0, \ldots, a_{m-1}, \overline{a_m, \ldots, a_{m+k-1}}]_N$.

Chúng tôi cũng trình bày lại khái niệm về khai triển cf_N tốt nhất của số thực x_0, ký hiệu bởi $x_0 = [[a_0, a_1, a_2, \ldots]]_N$.

Trong Mục 2.2, chúng ta sẽ thấy rằng, với $N > 1$, mỗi số vô tỷ bậc hai có khai triển tuần hoàn cf_N.

Lý thuyết về các liên phân số cổ điển liên quan mật thiết đến phương trình của Pell, và trong Mục 2.3 chúng ta trình bày lại các kết quả tương tự trong trường hợp $N > 1$.

2.1 Một số kết quả

Trong mục này chúng tôi trình bày lại các kết quả của Anselm và Weintraub [2] về liên phân số với tử số nguyên dương, tức là tổng quát của các liên phân số chính tắc, trong đó "tử số" 1 được thay thế bằng một số nguyên dương N tùy ý.